

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluție**

**1.a)** Fie  $A$  matricea sistemului:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} A = 3$ . Avem  $\text{rang} \bar{A} = 3 = \text{rang} A$ , deci sistemul este

compatibil.

**b)** Rezolvând sistemul obținem:  $x_1 = \frac{1+a-b-2\lambda}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1-a-b-2\lambda}{2}$ ,  $x_3 = b + \lambda$ ,  $x_4 = \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Punând condițiile ca  $x_1, x_2, x_3, x_4$  și  $x_1 + x_2$  să fie în progresie aritmetică, rezultă  $a = b = -\frac{1}{18}$

**c)** Din  $x_4 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$ . Apoi,  $x_2 > 0 \Rightarrow 1 - a - b - 2\lambda > 0$ , deci  $1 - a - b > 2\lambda > 0 \Rightarrow a + b < 1$

**2. a)**  $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = 1 - (x_1 + x_2 + x_3) + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3 = 4$ .

**b)** Presupunând că  $f$  are o rădăcină întreagă  $a$ , atunci  $a$  este divizor al termenului liber al polinomului, adică  $a \in \{-1, 1\}$ . Cum  $f(-1) = -8$ ,  $f(1) = 4$ , nici 1, nici  $-1$  nu sunt rădăcini ale lui  $f$ , deci  $f$  nu are rădăcini întregi.

**c)**  $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$ .

Avem  $x_1 + x_2 + x_3 = 3$  și  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -1$ .

Avem  $x_k^3 - 3x_k^2 + 5x_k + 1 = 0$ ,  $k = 1, 2, 3$  și adunând, rezultă  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -21$ .

În concluzie,  $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 = 18$ .